

Počtení část - ukázka

1. Uvažte funkci $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$.

- (a) rozšiřte f na \mathbb{R} tak, abyste ji mohli rozvinout do kosinové řady.
- (b) Vyšetřete bodovou a (lokálně) stejnoměrnou konvergenci této řady.
- (c) Sečtete řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}$$

(návod: použijte Parsevalovu rovnost).

2. Spočtete integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)}.$$

3. Uvažme funkci $f(z) = \frac{1}{\sin^3(z)}$.

- (a) Dokažte, že f je holomorfní na svém definičním oboru.
- (b) Spočtete hlavní část Laurentovy řady funkce f na mezikruží $U(0, 0, \pi)$ a určete hodnotu rezidua f v bodě 0.
- (c) Spočtete hlavní část Laurentovy řady funkce f na mezikruží $U(2\pi i, 0, \pi)$ a hodnotu rezidua f v tomto bodě.

3. (alternativně) Spočtete Fourierovu transformaci funkcí

- (a) $\chi_{[-1,1]}$ (tedy charakteristické funkce intervalu $[-1, 1]$),
- (b) $\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}$,

a inverzní Fourierovu transformaci funkce $\left(\frac{\sin(2\pi\xi)}{2\pi\xi}\right)^2$.

4. Spočtete Fourierovu transformaci distribuce

$$\cos 2x \cdot (\delta'' + 2\delta' + \delta),$$

kde δ je Diracova distribuce.

4. (alternativně) Uvažujte posloupnost $\{f_n\} \subset D'(\mathbb{R})$, kde f_n odpovídá funkci

$$\frac{1}{\pi} \cdot \frac{n}{e^{nx} + e^{-nx}} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Nalezněte limitu (ve smyslu distribucí) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

4. (alternativně) V prostoru regulárních distribucí na \mathbb{R} řešte rovnici

$$f'' + f' - 6f = 3\delta,$$

kde δ značí Diracovu distribuci v bodě 0, kde navíc požadujeme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ (kde limitu chápeme jako limitu funkce odpovídající dané regulární distribuci).